ICT1112

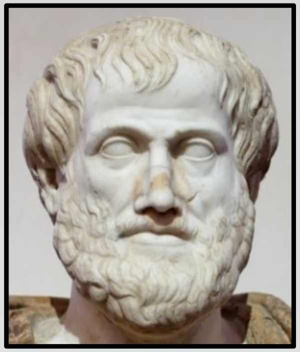
Introdução à Computação

Aulas 17/18 – Álgebra de Boole

Prof. Rogério Esteves Salustiano

- ✓ Histórico
- ✓ Noções de Lógica e Álgebra
- ✓ Álgebra de Boole
- ✓ Cálculo Proposicional

Aristóteles



Aristóteles
(384-322 AEC)

- Lógica Aristotélica (princípios):
  - **Princípio da Identidade**: ***A*** é ***A*** (todo objeto é idêntico a si mesmo)

    Livro é livro.

  - **Princípio da não Contrariedade**: ***A*** não pode ser ***A*** e ***não-A*** ao mesmo tempo

    João é professor. ✓

    João não é professor. ✗

    Se **João é professor**, então é contraditório (errado) afirmar que **João não é professor**

  - **Princípio do Terceiro Excluído**: ***A*** é ***X*** ou ***não-X***, não existindo terceira possibilidade

    Maria é honesta. ✓

    ou

    Maria não é honesta. ✓

    Ou **Maria é honesta** ou **Maria não é honesta** (desonesta), não existindo uma terceira possibilidade que relacione **Maria** à **honestidade**

- A lógica Aristotélica dominou o pensamento ocidental por mais de dois séculos

Gottfried Wihelm von Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646-1716)

- Primeiras ideias referentes ao sistema binário

- Lógica de Leibniz (princípios):

  - Todas as ideias são formadas a partir de um pequeno número de ideias simples, que formam o alfabeto do pensamento humano

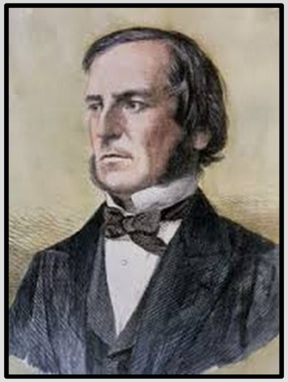
  - Ideias complexas são formadas a partir dessas ideias simples por uma combinação uniforme e simétrica, análoga à multiplicação aritmética

- Leibniz não publicou nada em relação à Lógica Formal, mas esses princípios foram encontrados em rascunhos de sua produção intelectual

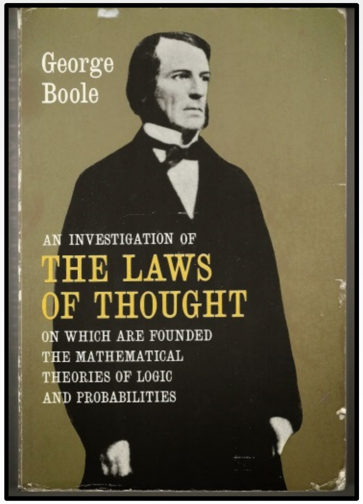
- A **Lógica Moderna** (Lógica de Boole) irá acrescentar alguns elementos à esses princípios da Lógica de Leibniz, como, por exemplo, a formulação de ideias complexas também poder ser feita a partir de uma combinação análoga à **adição aritmética** (e não somente análoga à **multiplicação aritmética**)

George Boole

- Considerado um dos fundadores da Ciência da Computação (apesar dos computadores não existirem na sua época)
- A Álgebra de Boole utiliza a linguagem simbólica para representar o **pensamento lógico**
- A **resolução de uma equação** escrita com a Álgebra de Boole não resulta em a uma resposta numérica, mas sim em uma **conclusão lógica**
- A Álgebra de Boole (ou Álgebra Booleana) é a base de todo **processamento digital** realizado nos computadores atuais



George Boole
(1815-1864)



The Laws of Thought
(1854)

"Uma Investigação das Leis do Pensamento" pode ser considerada um estudo racional das leis fundamentais relacionadas às operações lógicas realizadas pela mente, utilizando a álgebra como forma de expressar simbolicamente essas operações

Lógica

Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa

<u>LÓGICA</u>: 1. **Parte da filosofia que trata das formas do pensamento em geral (dedução, indução, hipótese, inferência etc.) e das operações intelectuais que visam à determinação do que é verdadeiro ou não;** **2**. tratado, compêndio de lógica; **3.** maneira rigorosa de raciocinar; **4.** Forma por que costuma raciocinar uma pessoa ou um grupo de pessoas ligadas por um fato de ordem social, psíquica, geográfica etc.; **5.** Maneira por que necessariamente se encadeiam os acontecimentos, as coisas ou os elementos de natureza efetiva; **6**. Encadeamento coerente de alguma coisa que obedece a certas convenções ou regras; **7. organização e planejamento das instruções, assertivas etc. em um algoritmo, a fim de viabilizar a implantação de um programa**.

Lógica Aristotélica → Lógica Moderna

Lógica Moderna Clássica

- Lógica de Boole

Lógica Moderna Não-Clássica

- Lógica Trivalorada
- Lógica Multivalorada
- Lógica Fuzzy

...

Álgebra

Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa

__ÁLGEBRA__: **1. Parte da matemática elementar que generaliza a aritmética, introduzindo variáveis que representam os números e simplificando e resolvendo, por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos**; **2.** tratado ou compêndio de álgebra; **3.** arte de restaurar ossos deslocados ou fraturados

Componentes da Álgebra

- Variáveis

  Uma variável é uma letra ou um símbolo utilizado para representar valores (numéricos ou lógicos)

  Exemplos: a, i, x, valor, λ, α

- Operações (Aritmética)

  Uma operação é um tipo de procedimento realizado sobre uma certa quantidade de elementos. Tal procedimento segue sempre a mesma lógica (**regra**). Uma operação pode ser classificada de acordo com a quantidade de termos necessário para ser realizada: **unária**, **binária**, **ternária**, etc.

  Exemplos: adição (+), subtração (-), multiplicação (x), divisão (÷), not (¬), and (^)

- Expressões

  Uma expressão pode conter números, variáveis e operações

  Exemplos: $x + 3$, $1 + 1$, x^2+3x-6, $\pi - 60$

- Equações

  Uma equação é uma afirmação de igualdade para todos os valores de variáveis envolvidos

  Exemplos: $x + 6 = 10$, $x^2+4x-9=0$, $a+b=c$

Álgebra de Boole

x = caneta y = azul

(a) $(1 - x)$ = conjunto todas as coisas que não são canetas

(b) $(1 - y)$ = conjunto todas as coisas que não são azuis

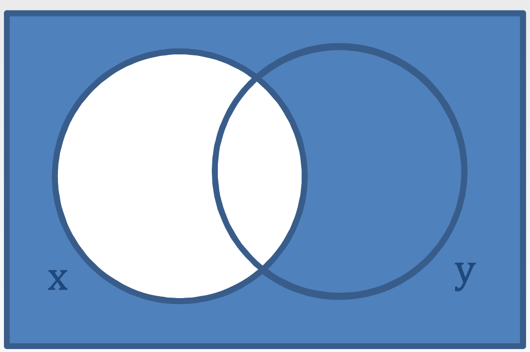
(c) (xy) = conjunto das canetas azuis (coisas que são canetas e são azuis)

(d) $(x + y)$ = conjunto de todas as coisas que são canetas ou que são azuis

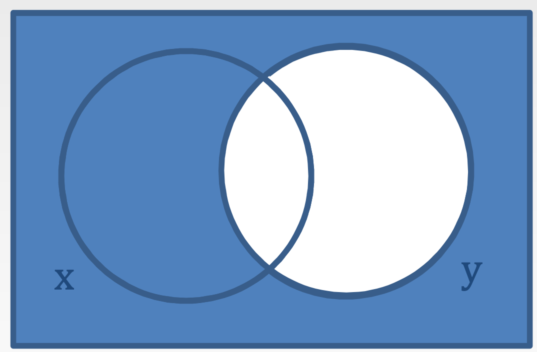
(e) $(1 - x)(1 - y)$ = conjunto de todas as coisas que não são canetas e não são azuis

(f) $(1 - x) + (1 - y)$ = conjunto de todas as coisas que não são canetas ou não são azuis

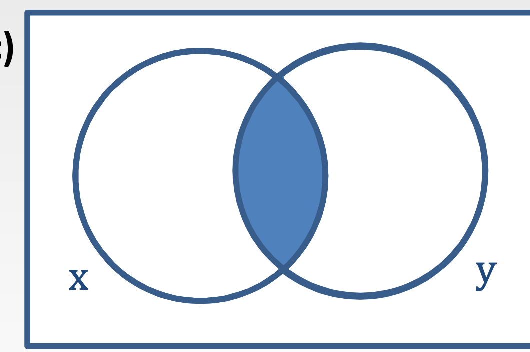
(a)



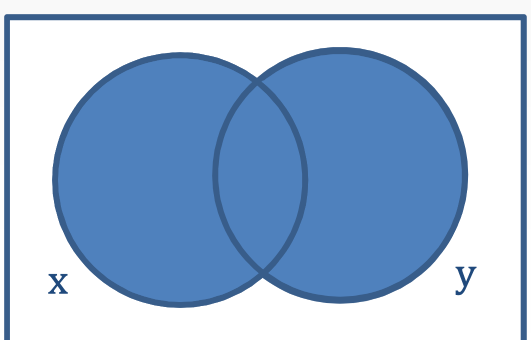
(b)



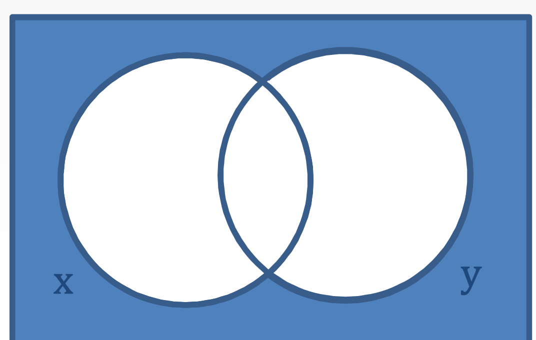
(c)



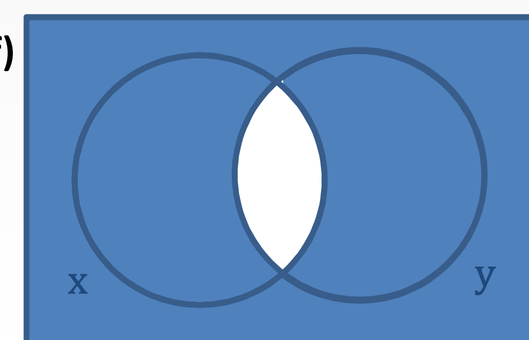
(d)



(e)



(f)



Álgebra de Boole

- A **Álgebra de Boole** é uma variação da **Álgebra Ordinária,** sendo a diferença básica relacionada ao valor das variáveis envolvidas:
  - **Álgebra Ordinária**: valores numéricos reais que indicam quantidades
  - **Álbebra Booleana**: valores lógicos (verdadeiro=1 e falso=0)
- A Álgebra de Boole utiliza **variáveis de valores lógicos** e o resultado de **expressões booleanas** também é **um valor lógico**
- Portanto, pode-se dizer que as **operações** da **Álgebra de Boole** são **operações lógicas**

Álgebra Ordinária →

- Variáveis representam **números reais**
- Os **operadores aplicados às variáveis** resultam em um **número real**

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

Álgebra Booleana →

- Variáveis representam **números booleanos (0 ou 1)**
- Os **operadores aplicados às variáveis** resultam em um **número booleano**

$$\mathbf{x} \in \{0, 1\}$$

Álgebra de Boole

- Elementos da Álgebra de Boole:

0 → **constante** que representa **falso**

1 → **constante** que representa **verdadeiro**

$\wedge$ → **operador binário** de **conjunção (AND)**

$\vee$ → **operador binário** de **disjunção (OR)**

$\neg$ → **operador unário** de **negação (NOT)**

X → **conjunto de valores** que as variáveis podem assumir: **X = {0, 1}**

Álgebra de Boole: **(X , $\wedge$, $\vee$, $\neg$, 0 , 1)**

Convenção lógica
- **0 = falso** (F)
- **1 = verdadeiro** (V ou T)

Operações Booleanas Básicas

Operador	Operação	Outros Símbolos utilizados/termos	Tipo	Exemplo	Operação Equivalente na Álgebra Ordinária
¬	NEGAÇÃO	NOT, não, !, ~, $\bar{A}$	unário	¬ A	¬ A = (1–A)
^	CONJUNÇÃO	AND, e, ×, ·, &, &&, ∩	binário	A ^ B	A ^ B = ¬((1–A)+(1–B))
˅	DISJUNÇÃO	OR, ou, +, |, ||, ∪	binário	A ˅ B	A ˅ B = ¬((1–A) (1–B))

NEGAÇÃO
NOT (¬)

A	¬ A
0	*1*
1	*0*

CONJUNÇÃO
AND (^)

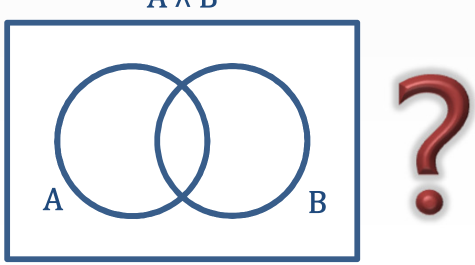
A	B	A ^ B
0	*0*	*0*
0	*1*	*0*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

DISJUNÇÃO
OR (˅)

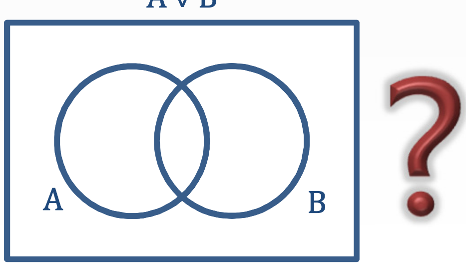
A	B	A ˅ B
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*
1	*1*	*1*

¬ A

A ∧ B



A ∨ B



Operações Booleanas Básicas

Operador	Operação	Outros Símbolos utilizados/termos	Tipo	Exemplo	Operação Equivalente na Álgebra Ordinária
¬	NEGAÇÃO	NOT, não, !, ~, $\bar{A}$	unário	¬ A	¬ A = (1–A)
^	CONJUNÇÃO	AND, e, ×, ·, &, &&, ∩	binário	A ^ B	A ^ B = ¬((1–A)+(1–B))
˅	DISJUNÇÃO	OR, ou, +, |, ||, ∪	binário	A ˅ B	A ˅ B = ¬((1–A) (1–B))

NEGAÇÃO
NOT (¬)

A	¬ A
0	*1*
1	*0*

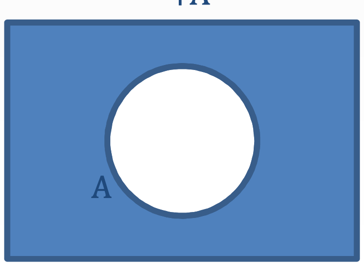
CONJUNÇÃO
AND (^)

A	B	A ^ B
0	*0*	*0*
0	*1*	*0*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

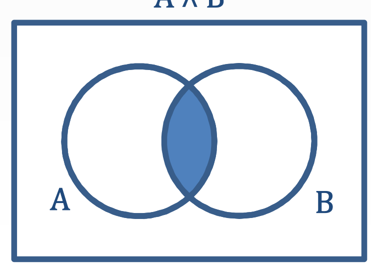
DISJUNÇÃO
OR (˅)

A	B	A ˅ B
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*
1	*1*	*1*

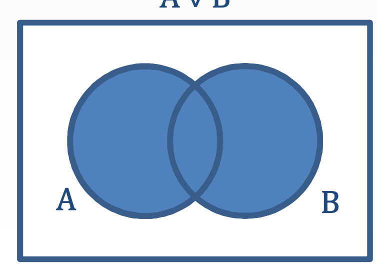
¬ A



A ∧ B



A ∨ B



Operações Booleanas Derivadas

Operador	Operação	Outros Símbolos utilizados/termos	Tipo	Exemplo	Operação Equivalente
⊕	DISJUNÇÃO EXCLUSIVA	EXCLUSIVE OR, não exclusivo, XOR	binário	A ⊕ B	A ⊕ B = (AᵛB)^¬(A^B)
→	CONDICIONAL* (IMPLICAÇÃO)	if/else, se/então	binário	A → B	A → B = ¬(A^¬B)
⊙	BI-CONDICIONAL** (COINCIDÊNCIA)	XNOR, ≡, ↔	binário	A ⊙ B	A ⊙ B = ¬(A⊕B)

* CONDICIONAL – Exemplo: “<u>Se</u> o dia está nublado <u>então</u> João fica triste”

** BI-CONDICIONAL – Exemplo: “João fica triste <u>se e somente se</u> o dia está nublado”

DISJUNÇÃO EXCLUSIVA

XOR (⊕)

A	B	A ⊕ B
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*
1	*1*	*0*

CONDICIONAL

IF/ELSE (→)

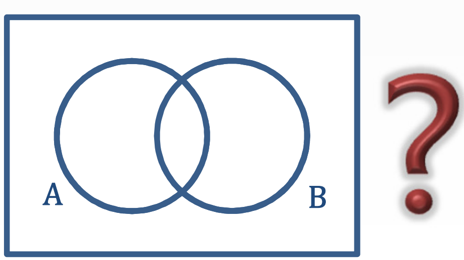
A	B	A → B
0	*0*	*1*
0	*1*	*1*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

BI-CONDICIONAL

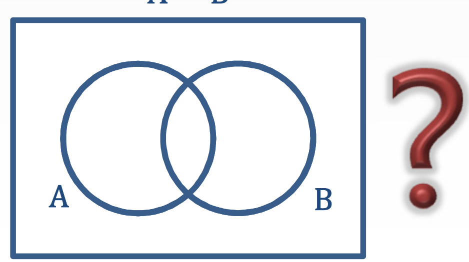
XNOR (⊙) (↔)

A	B	A ⊙ B
0	*0*	*1*
0	*1*	*0*
1	*0*	*0*
1	*1*	*1*

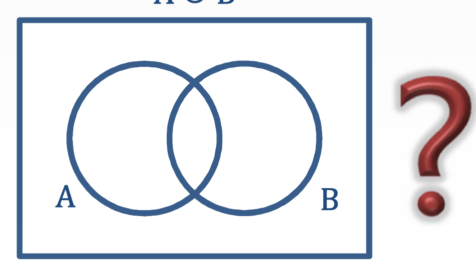
A ⊕ B



A → B



A ⊙ B



Operações Booleanas Derivadas

Operador	Operação	Outros Símbolos utilizados/termos	Tipo	Exemplo	Operação Equivalente
$\oplus$	DISJUNÇÃO EXCLUSIVA	EXCLUSIVE OR, não exclusivo, XOR	binário	$A \oplus B$	$A \oplus B = (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
$\rightarrow$	CONDICIONAL* (IMPLICAÇÃO)	if/else, se/então	binário	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow B = \neg(A \wedge \neg B)$
$\odot$	BI-CONDICIONAL** (COINCIDÊNCIA)	XNOR, ≡, ↔	binário	$A \odot B$	$A \odot B = \neg(A \oplus B)$

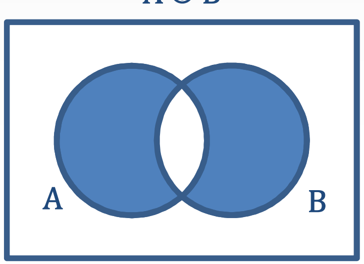
* CONDICIONAL – Exemplo: "Se o dia está nublado então João fica triste" ** BI-CONDICIONAL – Exemplo: "João fica triste se e somente se o dia está nublado"

DISJUNÇÃO EXCLUSIVA

XOR ($\oplus$)

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$A \oplus B$

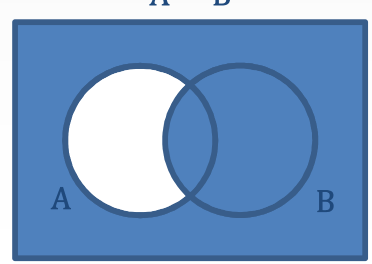


CONDICIONAL

IF/ELSE ($\rightarrow$)

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A \rightarrow B$

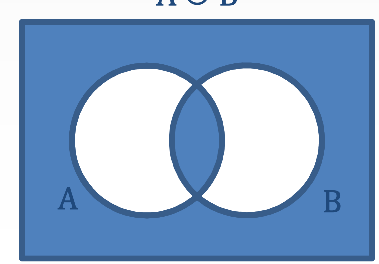


BI-CONDICIONAL

XNOR ($\odot$) ($\leftrightarrow$)

A	B	$A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$A \odot B$



Formalização do Pensamento Humano através das Operações Booleanas

" Eu irei na festa se Maria ou João forem e se Pedro não for "

- Variáveis booleanas

  F = Eu ir na festa

  M = Maria ir na festa

  J = João ir na festa

  P = Pedro ir na festa

M	J	P	F

Formalização do Pensamento Humano através das Operações Booleanas

" Eu irei na festa se Maria ou João forem e se Pedro não for "

- Variáveis booleanas

  F = Eu ir na festa

  M = Maria ir na festa

  J = João ir na festa

  P = Pedro ir na festa

M	J	P	F
0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*0*
1	*1*	*0*	*1*
1	*1*	*1*	*0*

$$F = (M \vee J) \wedge \neg P$$

Formalização do Pensamento Humano através das Operações Booleanas

" Após a refeição, o cliente de um restaurante escuta do garçom: 'O senhor pode pedir uma sobremesa e um chá ou café como cortesia do restaurante' "

- Variáveis booleanas
  - P = Pedido válido
  - S = Pedir sobremesa
  - X = Pedir chá
  - C = Pedir café

S	X	C	P
0	*0*	*0*	
0	*0*	*1*	
0	*1*	*0*	
0	*1*	*1*	
1	*0*	*0*	
1	*0*	*1*	
1	*1*	*0*	
1	*1*	*1*	

Formalização do Pensamento Humano através das Operações Booleanas

" Após a refeição, o cliente de um restaurante escuta do garçom: 'O senhor pode pedir uma sobremesa e um chá ou café como cortesia do restaurante' "

- Variáveis booleanas
  - P = Pedido válido
  - S = Pedir sobremesa
  - X = Pedir chá
  - C = Pedir café

S	X	C	P
0	*0*	*0*	*1*
0	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*
1	*1*	*1*	*0*

$$P = (S \vee \neg S) \wedge \neg(X \wedge C)$$

$$P = \neg(X \wedge C)$$

Cálculo Proposicional

- **Proposição**

  Uma **proposição** é uma **afirmação** (declaração feita em uma determinada linguagem) que pode ser **verdadeira** ou **falsa**

  "Todos os alunos da UNIFAL-MG são do estado de Minas de Gerais"

- **Postulado** (ou **Axioma**)

  Um **postulado** é uma **proposição** assumida como **verdade**, não havendo necessidade de provas

  "Para se determinar um plano são necessários três pontos não colineares"

- **Teorema**

  Um **teorema** é uma **afirmação** que pode ser **provada** como **verdadeira** através de outros **teoremas** e **postulados**

- **Prova**

  Uma **prova** é um **processo** (**dedutivo** ou **indutivo**) de provar que um **teorema** está **correto**

Postulados da Álgebra de Boole

- Seja X uma variável booleana

  Então $X=0$ ou $X=1$

  Se $X=0$ então $\overline{X}=1$ e vice-versa
- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1$
- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 1$

Teoremas da Álgebra de Boole

- **Teorema da Comutatividade**

$$A \cdot B = B \cdot A$$
$$A + B = B + A$$

- **Teorema da Associatividade**

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- **Teorema da Distributividade**

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

- **Teorema do Idempotente**

$$A \cdot A = A$$
$$A + A = A$$

- **Teorema da Involução**

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = A$$

- **Teorema das Identidades**

$$1 \cdot A = A$$
$$0 + A = A$$

- **Teorema do Elemento Nulo**

$$0 \cdot A = 0$$
$$1 + A = 1$$

- **Teorema do Complemento**

$$A \cdot \overline{\mathbf{A}} = 0$$
$$A + \overline{\mathbf{A}} = 1$$

- **Teorema da Absorção**

$$A \cdot (A + B) = A$$
$$A + (A \cdot B) = A$$
$$A \cdot (\overline{\mathbf{A}} + B) = A \cdot B$$
$$A + (\overline{\mathbf{A}} \cdot B) = A + B$$

- **Teorema De Morgan**

$$\overline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} \qquad (A \cdot B = \overline{\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}})$$
$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \qquad (\mathbf{A} + \mathbf{B} = \overline{\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}})$$

Generalização do Teorema De Morgan

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \ldots + \overline{X_n}$$
$$\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}$$

Expressões Booleanas e Simplificação

➢ Variável Booleana

- Uma **variável booleana** é uma **letra** ou um **símbolo** utilizado para representar um **valor booleano** (0 ou 1)

➢ Expressão Booleana

- Uma expressão booleana é um conjunto de variáveis booleanas relacionadas entre si por operadores lógicos.
- **Uma expressão booleana representa uma proposição.** De acordo com os valores atribuídos às variáveis booleanas, essa proposição é **verdadeira** ou **falsa**

➢ Literais

- Cada aparecimento de uma **variável** em uma **expressão booleana** é considerado um **literal**

Exemplo: A expressão $\overline{A}BC + \overline{BC} + A\overline{C} + A\overline{B}C$ possui 3 variáveis e 10 literais

➢ Simplificação de Expressões Booleanas

- Uma **expressão booleana** é mais simples do que outra se possuir uma **menor quantidade de literais**
- Uma **redução** na quantidade de literais resulta num **menor número de operações** necessárias para **avaliação da expressão**
- A **simplificação de Expressões Booleanas** pode ser realizada por
  - **Fatoração** (utilização dos Teoremas da Álgebra Booleana)
  - **Mapa de Veitch-Karnaugh**
  - **Algoritmo de Quine-McCluskey**

Simplificação de Expressões Booleanas

- Simplifique as seguintes Expressões Booleanas:

$$S = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B \qquad\qquad T = X + \overline{X}Y + \overline{X}YZ$$

- **Teorema da Comutatividade**

  $A \cdot B = B \cdot A$

  $A + B = B + A$

- **Teorema da Associatividade**

  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- **Teorema da Distributividade**

  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

  $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

- **Teorema do Idempotente**

  $A \cdot A = A$

  $A + A = A$

- **Teorema da Involução**

  $\overline{\overline{A}} = A$

- **Teorema das Identidades**

  $1 \cdot A = A$

  $0 + A = A$

- **Teorema do Elemento Nulo**

  $0 \cdot A = 0$

  $1 + A = 1$

- **Teorema do Complemento**

  $A \cdot \overline{A} = 0$

  $A + \overline{A} = 1$

- **Teorema da Absorção**

  $A \cdot (A + B) = A$

  $A + (A \cdot B) = A$

  $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

  $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$

- **Teorema De Morgan**

  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \quad (A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}})$

  $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad (A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}})$

  Generalização do Teorema De Morgan

  $\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \ldots + \overline{X_n}$

  $\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}$

Simplificação de Expressões Booleanas

$$S = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{A}}\mathrm{B}$$

$$S = \overline{\mathbf{A}}(\overline{\mathbf{B}} + \mathrm{B})$$

$$S = \overline{\mathbf{A}}(1)$$

$$S = \overline{\mathbf{A}}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Teorema da Distributividade)

$A + \overline{A} = 1$ (Teorema do Complemento)

$1 \cdot A = A$ (Teorema das Identidades)

A	B	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B}+\overline{A}B$	$\overline{A}$
0	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*

Simplificação de Expressões Booleanas

$$T = X + \overline{X}Y + \overline{X}YZ$$

$$T = X + \overline{X}Y(1 + Z)$$

$$T = X + \overline{X}Y$$

$$T = X + Y$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Teorema da Distributividade)

$1 + A = 1$ (Teorema do Elemento Nulo)

$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$ (Teorema da Absorção)

X	Y	Z	$\overline{X}Y$	$\overline{X}YZ$	$X+\overline{X}Y+\overline{X}YZ$	$X + Y$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

$$\overline{A}\,\overline{B} \neq \overline{AB}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AB	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{AB}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0

$$\overline{A}\,\overline{B} \neq \overline{AB}$$